Notasi Sigma (∑)

Lambang yang dipakai untuk menuliskan operasi penjumlahan secara singkat,jelas,dan Konsisten

Secara umum notasi sigma dinyatakan sebagai berikut

$\sum_{i=1}^{n} Ui$ = $U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n$

Keterangan :

1 = Batas Bawah i = Indeks

n = Batas Atas U_n = Suku ke-n

Contoh :

Nyatakan dengan notasi sigma jumlah bilangan berikut :

A. 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11

Penyelesaian :

= [2(1)-1] + [2(2)-1] + …… + [2(6)-1]

= $\sum_{k=1}^{6}(2k-1)$

B. $\sum_{b=5}^{9}(3b+1)$

= [3x5+1] + [3x6+1] + [3x7+1] + [3x8+1] + [3x9+1]

= 110

Sifat Notasi Sigma :

a. $\sum_{i=1}^{n} Ui$ = $U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_4$

Contoh : $\sum_{g=1}^{4} 3g$ = 3x1 + 3x2 + 3x3 + 3x4 = 30

b. $\sum_{i=1}^{n} Ui = \sum_{j=1}^{n} Uj$

Contoh : $\sum_{i=1}^{5} 4Ui = \sum_{j=1}^{5} 4Uj$ = 60

c. $\sum_{i=1}^{n} C$ = Cn ; Dimana C suatu konstanta

Contoh : $\sum_{i=1}^{7} 8 =$ 7x8 = 56

d. $\sum_{i=1}^{n} C\ Ui = C\ \sum_{i=1}^{n} Ui$

Contoh : $\sum_{i=1}^{4} 8\ 2i = 8\ \sum_{i=1}^{4} 2i$ = 20x8 = 160

e. $\sum_{i=1}^{n}(Ui \pm Vi) = \sum_{i=1}^{n} Ui \pm \sum_{i=1}^{n} Vi$

Contoh : $\sum_{i=1}^{3}(3i \pm 4i) = \sum_{i=1}^{3} 3i \pm \sum_{i=1}^{3} 4i$ = 7 + 14 + 21 = 42

f. $\sum_{i=1}^{n}(Ui \pm Vi)^2 = \sum_{i=1}^{n}(Ui)^2 + 2\sum_{i=1}^{n} Ui + \sum_{i=1}^{n}(Vi)^2$

Contoh : $\sum_{i=1}^{3}(3i \pm 4i)^2 = \sum_{i=1}^{3}(3i)^2 + 2\sum_{i=1}^{3} 3i + \sum_{i=1}^{3}(4i)^2 =$ 126 + 36 + 224 = 386

g. $\sum_{i=1}^{m}(Ui) = \sum_{i=1}^{n} Ui + \sum_{i=n+1}^{m} Ui$

Contoh : $\sum_{i=1}^{6}(3i) = \sum_{i=1}^{3} 3i + \sum_{i=3+1}^{6} 3i$ = 18 + 45 = 63

h. $\sum_{i=1}^{n}(Ui) = \sum_{i=1-1}^{n-1} U(i+1) = \sum_{i=1+1}^{n+1} U(i-1)$

Contoh : $\sum_{i=1}^{5}(3i) = \sum_{i=1-1}^{5-1} 3(i+1) = \sum_{i=1+1}^{5+1} U(i-1)$ = 45

i. $\sum_{i=m}^{n} Ui = U_m + \dots + U_n$

Contoh = $\sum_{i=3}^{5} 2i = U_3 + U_4 + U_5 =$ 3x2 + 4x2 + 5x2 = 24

j. $\sum_{i=m}^{n} C$ = n – m + 1

Contoh : $\sum_{i=3}^{5} 3$ = 5 – 3 + 1 = 3

Karena tidak ada yang harus dikalikan/difungsikan (indeks) ,hanya ada C(constanta) = 3x0 + 4x0 + 5x0 + 3(constanta) = 3

k. $\sum_{i=m}^{n}(CUi) = \sum_{i=m-r}^{n-r} CU(i+r) = \sum_{i=m+r}^{n+r} CU(i-r)$

Contoh : $\sum_{i=3}^{5}(5\ 3i) = \sum_{i=3-3}^{5-3} 5\ 3(i+3) = \sum_{i=3+3}^{5+3} 5\ 3(i-3)$ = 180

Induksi Matematika

Prinsip pembuktian kebenaran suatu pernyataan dengan Induksi Matematika diperlukan Langkah :

1. Langkah Dasar

   Pernyataan bernilai benar untuk n = 1

   <u>Dengan kata lain : Buktikan bahwa P(n) benar untuk n = 1</u>

2. Langkah Induksi

   Andaikan pernyataan benar untuk n = k

   <u>Dengan kata lain : P(n) diasumsikan benar untuk n = k</u>

   Dibuktikan bahwa pernyataan juga benar untuk n = k + 1

   <u>Dengan kata lain : Buktikan P(n) benar juga untuk n = k + 1</u>

3. Kesimpulan

Perlu kalian catat: bahwa induksi matematika hanya dipakai untuk mengecek atau membuktikan kebenaran dari sebuah pernyataan atau rumus. Dan induksi matematika tidak untuk menurunkan rumus.

Ketaksamaan

Sifat transitif

Sifat-sifat Pertidaksamaan

Jika $a < b$ dan $c < d$,

maka $a + c < b + d$

Sifat-sifat Pertidaksamaan

Untuk $a, b, c, d, \in R,$ berlaku sifat-sifat pertidaksamaan berikut :

1). Jika $a < b,$ maka $b > a$

2). Jika $a < b$ dan $b < c,$ maka $a < c$ (sifat transitif)

3). Jika $a < b$ dan $c \in R,$ maka $a + c < b + c.$

(Menambahkan kedua ruas dengan bilangan yang sama tidak mengubah tanda ketaksamaan)

4). Jika $a < b$ dan $c > 0,$ maka $ac < bc.$

(Mengalikan kedua ruas dengan bilangan positif yang sama tidak mengubah tanda ketaksamaan)

5). Jika $a < b$ dan $c < 0,$ maka $ac > bc.$

(Mengalikan kedua ruas dengan bilangan negatif yang sama akan mengubah tanda ketaksamaan)

6). Jika $a < b$ dan $c < d,$ maka $a + c < b + d$

7). Jika $\frac{a}{b} < 0$ dan $b \neq 0,$ maka $ab < 0$

8). Jika $\frac{a}{b} > 0$ dan $b \neq 0,$ maka $ab > 0$

9). Untuk semua $a \in R,$ berlaku $a^2 \geq 0$

Catatan :

*). Sifat 3 : jika setiap ruas ditambahkan/dikurangkan bilangan yang sama, maka tanda ketaksamaannya tetap (tidak berubah)

*). Sifat 4 dan 5 : Jika setiap ruas dikali/dibagi bilangan positif yang sama, maka tanda ketaksamaan tetap. dan jika dikali/dibagi bilangan negatif yang sama, maka tanda ketaksamaan berubah.

*). Untuk tanda ketaksamaan lihat artikel "Pertidaksamaan secara Umum"

Contoh :

a. 4 + 6 + 8 + … + <u>(2n + 2) = n^2 + 3n</u>

1. Buktikan bahwa P(n) benar untuk n = 1

n = 1

maka <u>(2n + 2) = n^2 + 3n</u>

2x1 + 2 = 1^2 + 3x1

4 = 4 , bernilai benar

2. P(n) diasumsikan benar untuk n = k

$n = k$

maka $4 + 6 + 8 + \ldots + \underline{(2n + 2) = n^2 + 3n}$

$4 + 6 + 8 + \ldots + \underline{(2k + 2) = k^2 + 3k}$

3. Buktikan P(n) benar juga untuk n = k + 1

$n = k + 1$

maka $4 + 6 + 8 + \ldots + (2k+2) + \underline{[2(k+1) + 2] = (k+1)^2 + 3(k+1)}$

$(K^2 + 3k) + 2k + 4 = k^2 + 2k + 1 + 3k + 3$

$K^2 + 5k + 4 = k^2 + 5k + 4$, Bernilai benar

Kesimpulan :

Terbukti Bahwa $4 + 6 + 8 + \ldots + \underline{(2n + 2) = n^2 + 3n}$ benar untuk setiap n bilangan asli

Program Linier

1. Sistem Pertidaksamaan Linier Dua Variabel

Langkah penyelesaian :

- Cari nilai x saat $y = 0$, dan nilai y saat $x = 0$
- Gambar grafik yang menghubungkan kedua titik
- Arsir daerah yang bersesuaian dengan tanda

Langkah menyusun PtLDV suatu daerah penyelesaian :

- Menentukan persamaan garis pembatas
  Garis memotong $(0, a)$ dan $(b, 0) \Rightarrow ax + by = ab$
- Melakukan uji titik untuk menentukan tanda ketaksamaan

> Jika garis pembatas utuh (————) dipilih tanda ketidaksamaan $\leq$ atau $\geq$
>
> Jika garis pembatas putus-putus (– – –) dipilih tanda pertidaksamaan $<$ atau $>$

2. Program Linear

- Model matematika
  Merubah permasalahan sehari-hari ke dalam bahasa matematika dalam bentuk persamaan, pertidaksamaan, dan juga fungsi.
  Contoh :
  Suatu adonan roti basah dibuat dengan menggunakan bahan 2 kg tepung dan 1 kg gula. Sementara satu adonan roti kering dibuat dengan memakai 1 kg tepung dan 3 kg gula. Ibu mempunyai persediaan tepung sebanyak 6 kg dan gula sebanyak 5 kg. Apabila pada masing- maisng satu adonan kue basah bisa memberikan keuntungan Rp75.000,00 serta masing- masing adonan kue kering bisa memberikan untung Rp60.000,00. Berapakah banyak kombinasi adonan roti yang bisa dibikin untuk memperoleh keuntungan maksimal?
  Jawab :
  Misalkan x menyatakan adonan roti basah, dan y menyatakan adonan roti kering

Contoh Soal Model Matematika

Bahan	Tepung	Gula
Adonan Roti Basah (x)	2 kg	2 kg
Adonan Roti Kering (y)	1 kg	3 kg
Persediaan	**6 kg**	**5 kg**
Model Matematika	**$2x + y \leq 6$**	**$2x + 3y \leq 5$**

Sehingga didapat model matematika $x \geq 0, y \geq 0, 2x + y \leq 6, 2x + 3y \leq 5$

- Fungsi Tujuan
  Fungsi objektif merupakan fungsi yang menjelaskan tujuan berdasarkan batasan-batasan yang ada. Fungsi objektif umumnya dinyatakan dengan $f(x,y) = ax + by$
- Menentukan Nilai Optimum Fungsi Tujuan
  a. Metode garis selidik
     I. Mencari daerah yangmemenuhi sistem pertidaksamaan yang diberikan
     II. Mencari persamaan garis selidik $f(x,y) = ax + by = k$, dengan k bilangan real

     Apabila arah geser garis selidik ke arah kanan, maka :
     - Apabila titik (x_1, y_1) merupakan titik pada daerah penyelesaian yang pertama dilewati oleh garis selidik maka nilai minimum diwakili oleh titik tersebut.
     - Apabila titik (x_2, y_2) merupakan titik pada daerah penyelesaian yang terakhir dilewati oleh garis selidik maka nilai maksimum diwakili oleh titik tersebut. Geser garis selidik yang sudah dibikin pada langkah nomor 2 atau buatlah garis-garis lain yang sejajar dengan garis selidik yang sudah dibikin pada arah daerah layak.

     Apabila arah geser garis selidik ke arah kiri, maka :

     - Apabila titik (x_1, y_1) merupakan titik pada daerah penyelesaian yang pertama dilewati oleh garis selidik maka nilai maksimum akan diwakili oleh titik tersebut.
     - Apabila titik (x_2, y_2) merupakan titik pada daerah penyelesaian yang terakhirdilewati oleh garis selidik maka nilai minimum diwakili oleh titik tersebut.

  b. Metode Uji Titik Pojok
     I. Mencari berbagai garis dari sistem pertidaksamaan yang menjadi fungsi kendala daripersoalan yang diberikan.
     II. Mencari berbagai titik pojok yang merupakan koordinat pembatas daerah yangmemenuhi fungsi kendala.
     III. Menghitung nilai optimum f(x,y) dari titik-titik pojok yang diperoleh.
     IV. Memperoleh nilai maksimum atau minimum sesuai dengan permasalahan.

Matriks

Pengertian Matriks

Matriks adalah sekumpulan bilangan dalam persegi atau persegi panjang yang diatur berdasarkan baris dan kolom, serta ditempatkan di dalam tanda kurung biasa ( ) maupun tanda kurung siku [ ].

Notasi dan Ordo Matriks

Matriks pada umumnya dinyatakan dengan huruf kapital dan elemen-elemenya dinyatakan dengan huruf kecil. Misalnya, Jika A adalah sebuah matriks. Maka elemen di dalamnya dinyatakan dengan a_{mn}. m merupakan baris ke-m dan n merupakan kolom ke-n dalam matriks. Matriks A dapat dinotasikan dengan A = (a_{mn}).

Jika suatu matriks terdiri atas m baris dan n kolom maka $m \times n$ menyatakan ukuran atau ordo dari matriks A. Matriks berordo $m \times n$ biasa ditulis dengan $\mathrm{A}_{m \times n}$. Bentuk umum matriks A berordo $m \times n$ dapat dituliskan sebagai berikut.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Penting!

Cara membaca elemen matriks a_{11} adalah a satu-satu bukan a sebelas

Macam-Macam Matriks

a. berdasarkan bentuk

1. Matriks Baris
   Matriks yang terdiri atas 1 baris dan memiliki ordo $1 \times n$.
   Contoh : A = $(-3 \quad 5 \quad 2)$. Matriks A berordo 1×3

2. Matriks Kolom
   Matriks yang terdiri atas 1 kolom dan memiliki ordo $n \times 1$.
   Contoh : A = $\begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$. Matriks A berordo 3×1

3. Matriks Persegi
   Matriks yang memiliki banyak baris dan kolom yang sama (berordo nxn). Dalam matriks persegi terdapat dua diagonal. yaitu diagonal utama dan diagonal samping yang mana dapat dilihat pada matriks di bawah ini.
   Contoh : A = $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & -6 \\ 5 & 7 & 0 \end{pmatrix}$. Matriks A berordo 3x3

b. Berdasarkan pola-pola elemen

1. Matriks nol (O)
   Matriks yang semua elemennya nol (0)
   Contoh : $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2. Matriks Diagonal (D)
   Matriks persegi yang elemen-elemennya nol (0) kecuali elemen pada diagonalnya.
   Contoh : $D = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ atau $D = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
3. Matriks Identitas (I)
   Matriks persegi yang elemen-elemen yang pada diagonal utamanya sama dengan satu (1) dan elemen-elemen lain sama dengan nol (0).
   Contoh : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
4. Matriks Segitiga Bawah (L)
   Matriks persegi yang elemen-elemen diatas diagonal utamanya sama dengan nol (0)
   Contoh : $L = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 0 \\ 11 & -5 & 2 \end{pmatrix}$
5. Matriks Segitiga Atas (U)
   Matriks persegi yang elemen-elemen dibawah diagonalnya sama dengan (0)
   Contoh : $U = \begin{pmatrix} -7 & 13 & 6 \\ 0 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Transpose Matriks

Transpose matriks adalah matriks baru yang terbentuk dari menuliskan elemen-elemen pada baris suatu matriks menjadi elemen-elemen kolom. Transpose matriks A dapat dinyatakan dengan A^T atau A'.

Contoh : Jika $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 0 & 13 & 10 \end{pmatrix}$ maka $A^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 13 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$

Matriks Simetris

Sebuah matriks akan menjadi matriks simetris apabila $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A^T}$ yang mana matriks A merupakan matriks persegi.

Contoh : $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 8 \\ -5 & 7 & 6 \\ 8 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ maka $A^T = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 8 \\ -5 & 7 & 6 \\ 8 & 6 & 0 \end{pmatrix}$. Karena $A = A^T$, maka matriks A merupakan matriks simetris.

Kesamaan Dua Matriks

Matriks A dan Matriks B dikatakan sama apabila

- Ordo A dan B sama
- Setiap elemen di masing

Contoh : $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} \frac{6}{2} & 1 \\ \frac{-10}{5} & 0 \end{pmatrix}$

Operasi Matriks

Penjumlahan Matriks

Penjumlahan matriks hanya dapat dilakukan apabila ordo matriks sama. Hasil penjumlahan matriks adalah matriks baru yang elemennya merupakan penjumlahan elemen-elemen seletak dari kedua matriks yang dijumlahkan. Ordo dari matriks hasil penjumlahan sama dengan ordo matriks yang dijumlahkan.

Contoh : $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$. Maka $A + B = \begin{pmatrix} 3+5 & 1+4 \\ (-2)+9 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Karena ordo A dan B berbeda maka kedua matriks tidak dapat dijumlahkan.

Dalam penjumlahan matriks berlaku beberapa sifat :

a. Sifat Komutatif = $A + B = B + A$
b. Sifat Asosiatif = $A + (B + C) = (A + B) + C$
c. Terdapat unsur identitas pada penjumlahan matriks. Yaitu Matriks O (Seluruh elemennya 0), sehingga = $A + O = O$
d. Matriks A memiliki lawan (Invers aditif) matriks $-A$. Yang mana elemen didalam matriks $-A$ merupakan kebalikan elemen matriks A. sehingga $A + (-A) = O$

Pengurangan Matriks

Pengurangan matriks hanya dapat dilakukan apabila ordo matriks sama. Hasil pengurangan matriks adalah matriks baru yang elemennya merupakan pengurangan elemen-elemen seletak dari kedua matriks yang dikurangkan. Ordo dari matriks hasil pengurangan sama dengan ordo matriks yang dikurangkan.

Contoh : $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$. Maka $A - B = \begin{pmatrix} 3-5 & 1-4 \\ (-2)-9 & 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -11 & -1 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Karena ordo A dan B berbeda maka kedua matriks tidak dapat dikurangkan.

Dalam pengurangan matriks sifat komutatif tidak berlaku karena :

$A - B \neq B - A$. Contoh :

Diketahui $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$.

$A - B = \begin{pmatrix} 3-5 & 1-4 \\ (-2)-9 & 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -11 & -1 \end{pmatrix}$

Dan $B - A = \begin{pmatrix} 5-3 & 4-1 \\ 9-(-2) & 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 11 & 1 \end{pmatrix}$

Dari hasil di atas, terbukti $A - B \neq B - A$.

Perkalian Skalar Matriks

Perkalian matriks A dan suatu bilangan real k disebut perkalian skalar matriks. Hasil dari perkalian skalar matriks A dan k merupakan matriks baru yang elemennya merupakan hasil kali elemen k dan matriks A.

Contoh : $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ dan $k = 2.$ maka $kA = 2\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times 3 & 2\times 1 \\ 2\times(-2) & 2\times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$

Dalam perkalian skalar matriks, berlaku sifat :

a. Sifat Distributif : $(k_1 + k_2)A = k_1A + k_2A$ dan $k(A+B) = kA + kB$
b. Sifat Asosiatif : $k_1(k_2A) = k_1k_2A$

Perkalian Matriks

Perkalian matriks dapat dilakukan apabila banyak kolom matriks pertama sama dengan banyak baris matriks kedua $(A_{mx} \times B_{xn})$. Hasil dari perkalian matriks adalah jumlah dari hasil perkalian elemen pada matriks A baris i dan matriks B kolom j. Ordo dari hasil perkalian matriks $A_{mx} \times B_{xn}$ adalah $m \times n$.

Contoh : $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 6 \\ 7 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

Maka $A \times B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 1 & 6 \\ 7 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\times 4 + 5\times 7 & 3\times 1 + 5\times(-2) & 3\times 6 + 5\times 3 \\ 0\times 4 + (-1)\times 7 & 0\times 1 + (-1)\times(-2) & 0\times 6 + (-1)\times 3 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 12+35 & 3+(-10) & 18+15 \\ 0+(-7) & 0+2 & 0+(-3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 47 & -7 & 33 \\ -7 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Sifat-sifat dalam perkalian matriks :

a. Sifat Komutatif tidak berlaku : $AB \neq BA$
b. Sifat asosiatif : $(AB)C = A(BC)$
c. Sifat distributif : $A(B+C) = AB + BC$ dan $(A+B)C = AC + BC$
   $A(B-C) = AB - AC$ dan $(A-B)C = AC - BC$
d. Sifat Asosiatif : $kAB = (kA)B = A(kB)$
e. Sifat Identitas : $AI = A$. (I merupakan matriks identitas)

Perpangkatan Matriks

Perpangkatan pada matriks hanya terjadi apabila matriks yang dipangkatkan adalah matriks persegi.

Contoh : Jika $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$. Maka $A^2 = AA = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 3 + 1 \times (-2) & 3 \times 1 + 1 \times 0 \\ -2 \times 3 + 0 \times (-2) & -2 \times 1 + 0 \times 0 \end{pmatrix}$

Sifat-Sifat dalam perpangkatan Matriks :

a. $A^r A^s = A^{r+s}$
b. $(A^r)^s = A^{rs}$
c. $A^n = A \times A^{n-1}$
d. $A^0 = 1$

Determinan dan Invers Matriks

1. **Determinan matriks dengan ordo $2x2$**

   Misalkan matriks tersebut adalah $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, maka determinan matriks A dinyatakan sebagai

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

2. **Determinan matriks dengan ordo $3x3$**

   Misalkan $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{pmatrix}$, untuk memudahkan perhitungan, buatlah salinan $\begin{matrix} a_1 & a_2 \\ a_4 & a_5 \\ a_7 & a_8 \end{matrix}$ di kanan matriks seperti berikut ini

$$\left|\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_1 & a_2 \\ a_4 & a_5 \\ a_7 & a_8 \end{matrix}$$

   Maka $\det A = a_1a_5a_9 + a_2a_6a_7 + a_3a_4a_8 - a_7a_5a_3 - a_8a_6a_1 - a_9a_4a_2$

3. **Sifat sifat determinan**

   a. Determinan matriks A sama dengan determinan matriks A^t

   $$|A| = |A^t|$$

   b. Determinan matriks AB sama dengan determinan matriks A dikali determinan matriks B

   $$|AB| = |A||B|$$

   c. Determinan matriks A^{-1} sama dengan seper determinan matriks A

   $$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

   d. Jika setiap elemen pada matriks A yang berordo $n\ x\ n$ dikali dengan k, maka determinan matriks baru adalah determinan matriks A dikali k^n

   $$|kA| = k^n|A|$$

4. **Invers matriks**

   Invers matriks A dilambangkan A^{-1}. Misalkan $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj\ A = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

   Jika $\det A = 0$, maka matriks A tidak memiliki invers atau disebut matriks singular

   Sifat invers Matriks $\Rightarrow AA^{-1} = A^{-1}A = I$

5. **Persamaan matriks**

   Invers matriks juga digunakan jika ada pembagian dalam matriks

   Jika $A, B,$ dan X ketiganya adalah matriks, maka

   a. $AX = B$ berlaku $X = A^{-1}B$

   b. $XA = B$ berlaku $X = BA^{-1}$

6. Menyelesaikan SPLDV atau SPLTV menggunakan matriks

Matriks juga dapat digunakan dalam menyelesaikan SPLDV atau SPLTV

Contoh pada SPLDV berikut :

$$3x + 5y = 4 \ldots (1)$$
$$5x - y = 16 \ldots (2)$$

Dalam bentuk matriks, persamaan (1) dan (2) dapat dituliskan sebagai berikut

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 16 \end{pmatrix}$$

Matriks $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ disebut matriks koefisien, yaitu matriks yang unsur-unsurnya merupakan koefisien dari variabel-variabel pada persamaan (1) dan (2).

Matriks $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ disebut matriks variabel, yaitu matriks yang unsur-unsurnya merupakan variabel variabel pada persamaan (1) dan (2).

Matriks $\begin{pmatrix} 4 \\ 16 \end{pmatrix}$ disebut matriks konstanta, yaitu matriks yang unsur-unsurnya merupakan konstanta pada persamaan (1) dan (2).

Cara 1

Penyelesaian $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dapat menggunakan persamaan matriks seperti pada nomor 5, yaitu

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 4 \\ 16 \end{pmatrix} = -\frac{1}{28}\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 16 \end{pmatrix} = -\frac{1}{28}\begin{pmatrix} -84 \\ 28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Sehingga $x = 3$ dan $y = -1$

Cara 2

Pada persamaan

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

Penyelesaian x dan y adalah

$$x = \frac{Dx}{D} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

$$y = \frac{Dy}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Sehingga penyelesaian pada contoh diatas adalah

$$x = \frac{Dx}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 16 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-84}{-28} = 3$$

$$y = \frac{Dy}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 16 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{28}{-28} = -1$$

Contoh pada SPLTV berikut :

$$x + y + z = 2$$

$$2x + y - z = 9$$

$$-x + 9y + 2z = 2$$

Dalam bentuk matriks, SPLTV tersebut dapat dituliskan sebagai berikut

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 9 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Maka penyelesaian x, y, z adalah

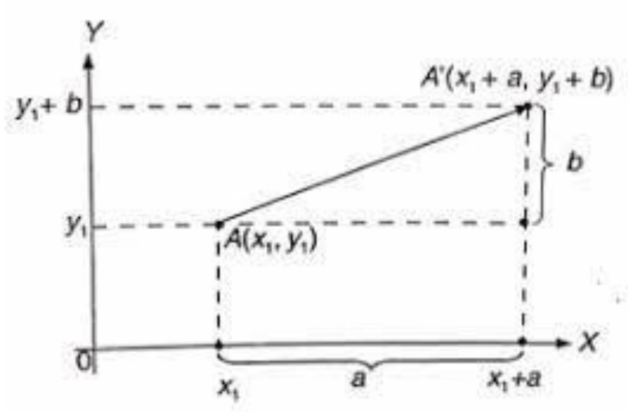
$$x = \frac{Dx}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 9 & 1 & -1 \\ 2 & 9 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 9 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{81}{27} = 3$$

$$y = \frac{Dy}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 9 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 9 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{27}{27} = 1$$

$$z = \frac{Dz}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 9 \\ -1 & 9 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 9 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-54}{27} = -2$$

TRANSFORMASI GEOMETRI

Translasi (pergeseran)



Bergeser T $\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$:

X : (+) kekanan , (-) kekiri

Y : (+) keatas , (-) kebawah

Rumus/konsep dasar :

A (x,y) digeser sebesar T $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ maka bayangannya A' (x + a,y + b)

Ex :

1. B (2,3) digeser sebesar T $\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$ maka bayangannya (B') adalah

   B' (2 + 4 , 3 - 5) = B' (6,-2)

2. Garis 3x + y digeser kekanan sebanyak 2 satuan dan kebawah sebanyak 3 satuan, bagaimana garis bayangan tersebut

3x + y digeser sebesar T $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

x + 2 = x'   x = x' - 2

y - 3 = y'   y = y' + 3

3 (x – 2) + (y + 3) = 6

3x + y = 9

Jadi dapat di ambil kesimpulan bahwa pada pergeseran garis maka nanti berlawanan dinilainya (dikali -1) ex :

Pergeseran T (2,-3) maka Ketika disubtitusikan ke persamaan menjadi 3 (x **– 2** , y **+ 3**) = 6

Refleksi : pencerminan

Jenis Pencerminan	Matriks
Sumbu *x*	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
Sumbu *y*	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Garis y = x	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
Garis y = −x	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
Titik O(0,0)	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
Garis x = h	$\begin{pmatrix} 2h \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$
Garis y = k	$\begin{pmatrix} 0 \\ 2k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

A. Alternative menggunakan matrix

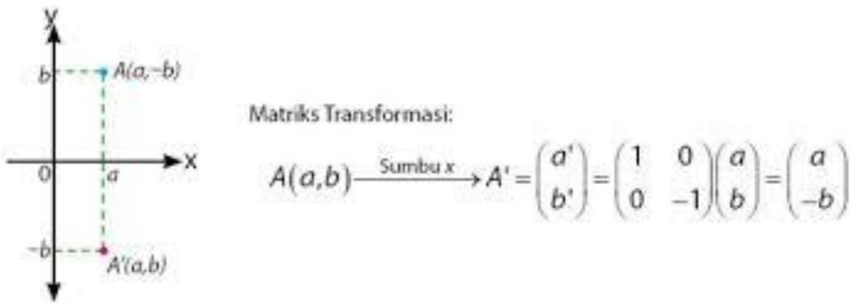
Ex : sumbu x $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$ **=** $\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{-b} \end{pmatrix}$

B. dengan membuat koordinat kartesius (sumbu x/sumbu y) lalu dicerminkan terhadap sumbu yang diminta

Ex : Sumbu x (sebagai acuan cermin) maka terjadi pencerminan dengan perpindahan koordinat y dengan jarak ke cermin yang sama sehingga didapat pencerminan sumbu x

A (x,y) dicerminkan terhadap sumbu x menjadi A' (x,-y)

1. Refleksi terhadap sumbu x

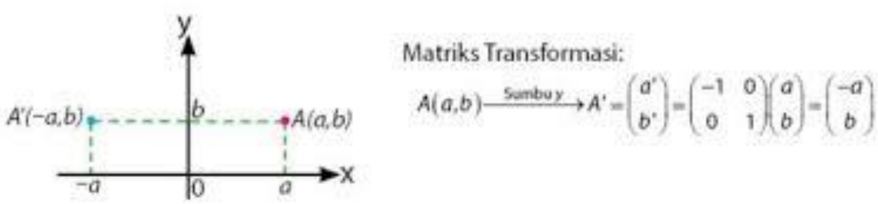


A (x,y) direfleksikan terhadap **sumbu x** maka bayangannya adalah **A' (x,-y)**

Ex :

A (3,4) direfleksikan terhadap sumbu x maka bayangannya adalah A' (3,-4)

2. Refleksi terhadap sumbu y

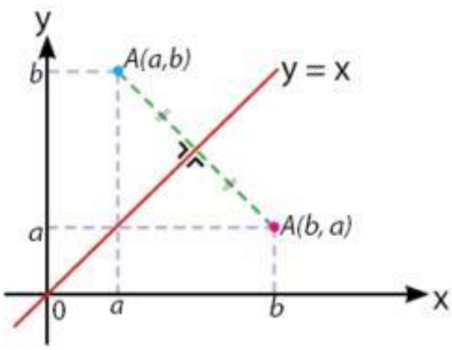


A (x,y) direfleksikan terhadap **sumbu y** maka bayangannya adalah **A' (-x,y)**

Ex :

A (3,4) direfleksikan terhadap sumbu x maka bayangannya adalah A' (-3,4)

3. Refleksi terhadap sumbu y = x



Matriks Transformasi:

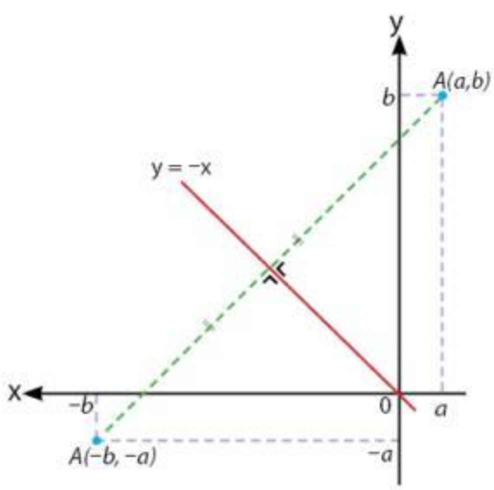
$$A(a,b) \xrightarrow{\text{garis } y=x} A' = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$$

A (x,y) direfleksikan terhadap **sumbu y = x** maka bayangannya adalah **A’ (y,x)**

Ex :

A (3,4) direfleksikan terhadap sumbu y = x maka bayangannya adalah A’ (4,3)

4. Refleksi terhadap sumbu y = -x



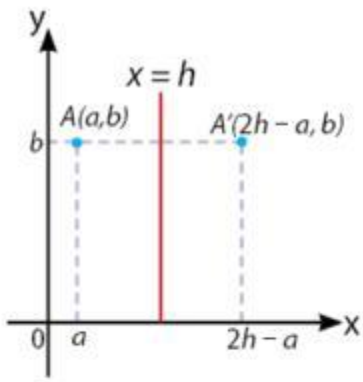
$$A(a,b) \xrightarrow{\text{garis } y=-x} A' = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ -a \end{pmatrix}$$

A (x,y) direfleksikan terhadap **sumbu y = -x** maka bayangannya adalah **A’ (-y,-x)**

Ex :

A (3,4) direfleksikan terhadap sumbu y = - x maka bayangannya adalah A’ (-4,-3)

5. Refleksi terhadap sumbu x = a



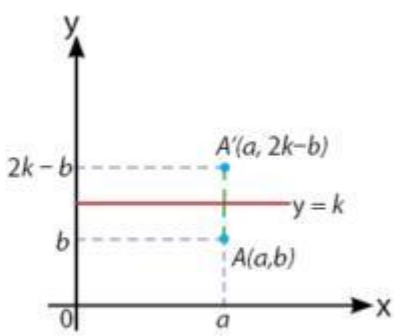
$$A(a,b) \xrightarrow{\text{garis } x=h} A' = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2h-a \\ b \end{pmatrix}$$

A (x,y) direfleksikan terhadap **sumbu x = a** maka bayangannya adalah **A' (2a-x,y)**

Ex :

A (3,4) direfleksikan terhadap sumbu x=3 maka bayangannya adalah A' (2x3 – 3,4) = A' (3,4)

6. Refleksi terhadap sumbu y = a



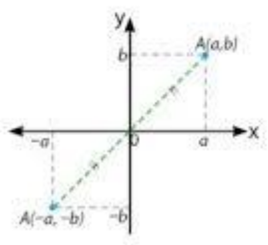
$$A(a,b) \xrightarrow{\text{garis } y=k} A' = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 2k-b \end{pmatrix}$$

A (x,y) direfleksikan terhadap **sumbu y = a** maka bayangannya adalah **A' (x,2a - y)**

Ex :

A (3,4) direfleksikan terhadap sumbu x=3 maka bayangannya adalah A' (3,3x2 - 4) = A' (3,2)

7. Refleksi terhadap titik pusat (0,0)



$$A(a,b) \xrightarrow{\text{titik } O(0,0)} A' = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix}$$

A' = $\begin{pmatrix} \boldsymbol{a'} \\ \boldsymbol{b'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix}$

Ex :

A (3,4) direfleksikan terhadap titik pusat (0,0) maka bayangannya adalah

A' = $\begin{pmatrix} \boldsymbol{a'} \\ \boldsymbol{b'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix}$

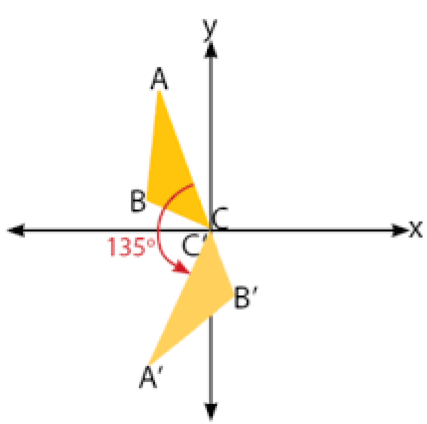
A' = $\begin{pmatrix} \boldsymbol{a'} \\ \boldsymbol{b'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$

Jadi titik bayangannya adalah (-3,-4)

Rotasi : Berputar

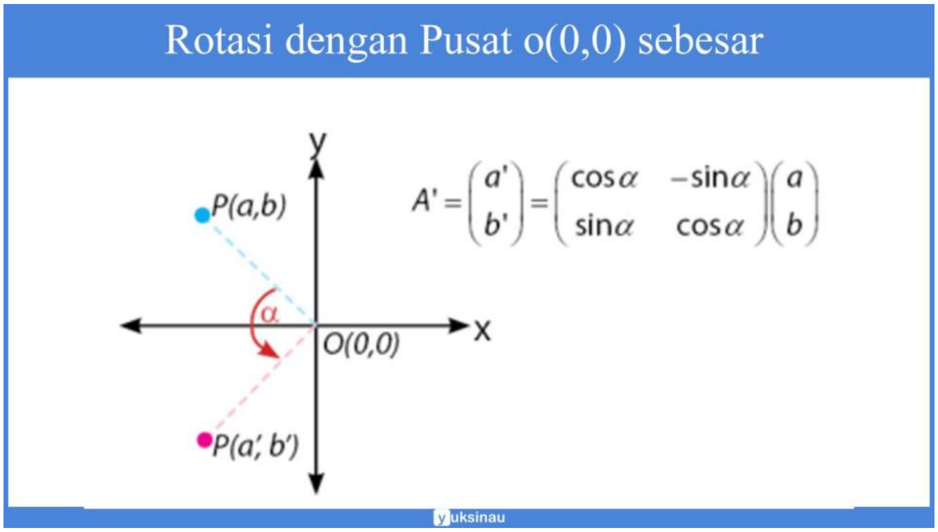
Apabila arah perputaran rotasi pada sebuah benda searah dengan jarum jam, maka sudut yang dibentuk yaitu -α.

Begitu juga sebaliknya , Apabila arah perputaran rotasi pada sebuah benda berlawanan arah dengan jarum jam, maka sudut yang dibentuk yaitu α.



1. Rotasi dengan Pusat o (0,0) sebesar α

A' = $\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$



Ex :

Sebuah titik A (3,1) di putar 90 derajat dengan pusat (0,0), apa titik bayangannya ?

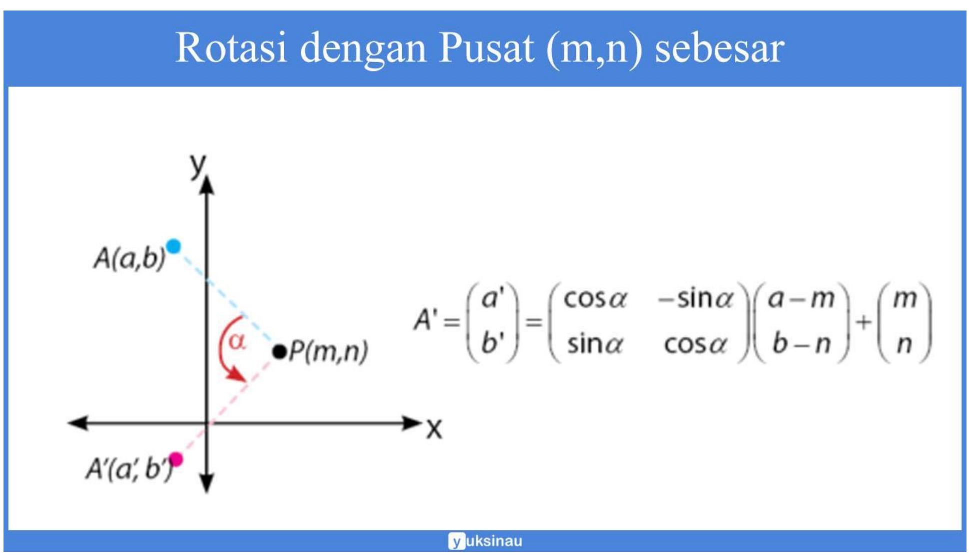
A' = $\begin{pmatrix} \boldsymbol{a'} \\ \boldsymbol{b'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

A' = $\begin{pmatrix} \boldsymbol{a'} \\ \boldsymbol{b'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 90 & -\sin 90 \\ \sin 90 & \cos 90 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

A' = $\begin{pmatrix} \boldsymbol{a'} \\ \boldsymbol{b'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Jadi titik bayangannya adalah (-1,3)

2. Rotasi dengan Pusat (m,n) sebesar α



A' = $\begin{pmatrix} \boldsymbol{a'} \\ \boldsymbol{b'} \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a-m \\ b-n \end{pmatrix}$ + $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$

Ex :

Sebuah titik A (3,1) di putar 90 derajat dengan pusat (2,1), apa titik bayangannya ?

A' = $\begin{pmatrix} \boldsymbol{a'} \\ \boldsymbol{b'} \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a-m \\ b-n \end{pmatrix}$ + $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$

A' = $\begin{pmatrix} \boldsymbol{a'} \\ \boldsymbol{b'} \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} \cos 90 & -\sin 90 \\ \sin 90 & \cos 90 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3-2 \\ 1-1 \end{pmatrix}$ + $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

A' = $\begin{pmatrix} \boldsymbol{a'} \\ \boldsymbol{b'} \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ + $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

A' = $\begin{pmatrix} \boldsymbol{a'} \\ \boldsymbol{b'} \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ + $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Jadi titik bayangannya adalah (2,2)

Bisa dengan cara B (3,1) dirotasi 90 derajat dengan pusat (2,1) menjadi (2,2)

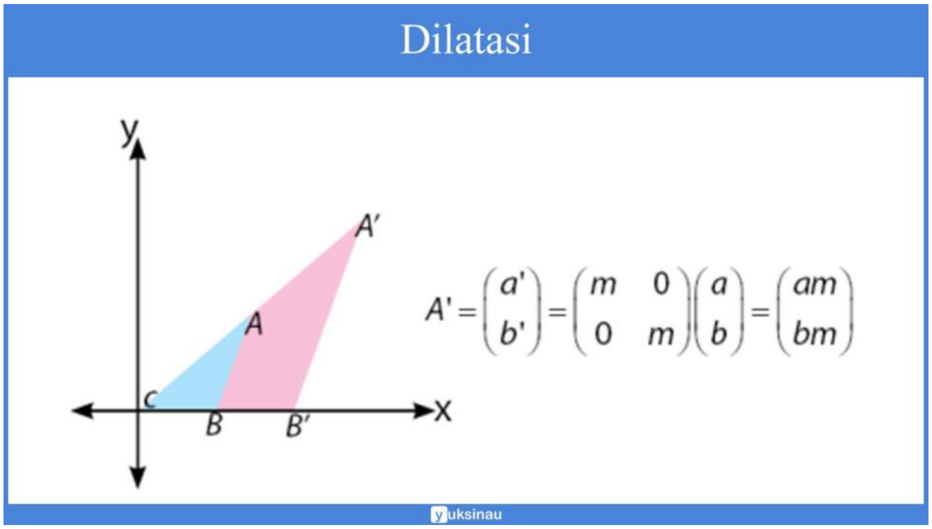
$-2 \quad -1$ $\qquad -2 \quad -1 \qquad +2 \quad +1$

(1,0) dirotasi 90 derajat dengan pusat (0,0) menjadi (0,1)

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dilatasi (perkalian)

1. Dilatasi titik A(a, b) pada pusat O(0,0) dengan faktor skala m



A' = $\begin{pmatrix} \boldsymbol{a'} \\ \boldsymbol{b'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ak \\ bk \end{pmatrix}$

Ex :

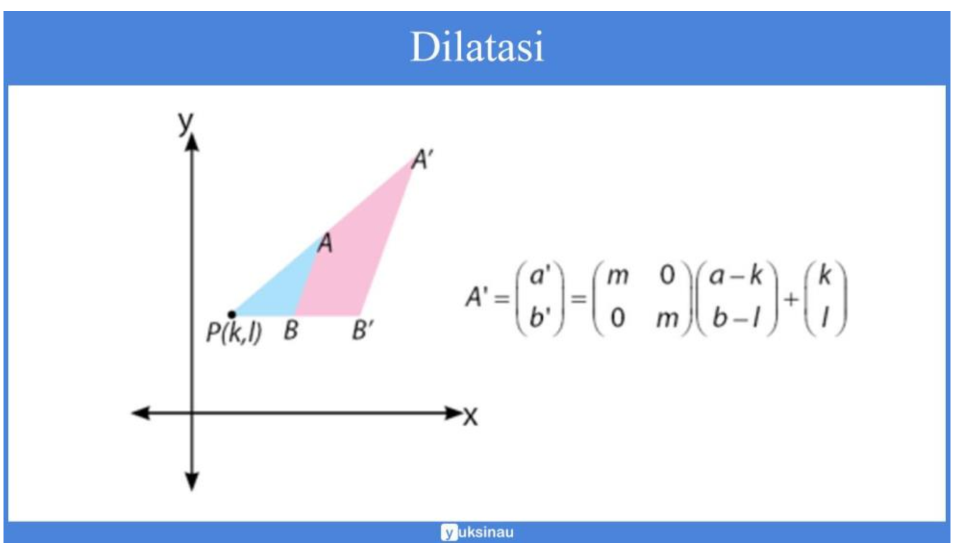
Sebuah titik A (2,3) di Dilatasi 3 kali dengan pusat (0,0), apa titik bayangannya ?

A' = $\begin{pmatrix} \boldsymbol{a'} \\ \boldsymbol{b'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ak \\ bk \end{pmatrix}$

A' = $\begin{pmatrix} \boldsymbol{a'} \\ \boldsymbol{b'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x2 \\ 3x3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$

Jadi titik bayangannya adalah (6,9)

2. Dilatasi titik A(a,b) terhadap pusat P(k,l) dengan faktor skala m



Ex :

Sebuah titik A (5,1) di Dilatasi 3 kali dengan pusat (2,-2), apa titik bayangannya ?

A' = $\begin{pmatrix} \boldsymbol{a'} \\ \boldsymbol{b'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a - f \\ b - g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$

A' = $\begin{pmatrix} \boldsymbol{a'} \\ \boldsymbol{b'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 - 2 \\ 1 - (-2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

A' = $\begin{pmatrix} \boldsymbol{a'} \\ \boldsymbol{b'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \end{pmatrix}$

Jadi titik bayangannya adalah (11,7)

Bisa dengan cara A (5,1) di Dilatasi 3 kali dengan pusat (2,-2) menjadi (11,7)

$-2 \quad +2$ $\qquad$ $-2 \quad +2$ $\qquad$ $+2 \quad -2$

(3,3) di Dilatasi 3 kali dengan pusat (0,0) menjadi (9,9)